Kapitel II
Über den Gebrauch der Differenzen in der Lehre der Reihen *

Leonhard Euler

§37 Dass die Natur der Reihen durch die Differenzen im höchsten Maße illustriert wird, ist aus den ersten Anfängen hinreichend bekannt. Die wesentliche Eigenschaft einer arithmetischen Progression, die zuerst betrachtet zu werden pflegt, besteht nämlich darin, dass ihre ersten Differenzen einander gleich sind; daher werden die zweiten und alle übrigen Differenzen Null sein. Es sind des Weiteren Reihen gegeben, deren zweite Differenzen erst gleich sind, die dieser Sache wegen angenehm Reihen zweiter Ordnung genannt werden, während arithmetische Progressionen als Reihen erster Ordnung bezeichnet werden. Weiter werden die Reihen dritter Ordnung die sein, deren dritte Differenzen konstant sind, und zur vierten Ordnung und den folgenden werden die Reihen gerechnet, deren vierte und höhere Differenzen erst konstant sind.

§38 In dieser Einteilung werden unendliche viele Geschlechter von Reihen erfasst und dennoch ist es nicht möglich, alle Reihen auf diese Geschlechter zurückzuführen. Es tauchen nämlich unzählige Reihen auf, die, indem die Differenzen genommen werden, niemals zu konstanten Termen führen; von dieser Art, außer unzähligen anderen, sind geometrische Progressionen, die niemals konstante Differenzen liefern wie sich aus diesem Beispiel sehen lässt

*Originaltitel: "Caput *II*. De usu differentiarum in doctrina serierum", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 40-64", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \text{ etc}$$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \text{ etc}$$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \text{ etc}$$

Weil nämlich die Reihe der Differenzen jeder Ordnung der vorgelegten Reihe selbst gleich ist, wird die Gleichheit der Differenzen völlig ausgeschlossen. Deswegen werden mehrere Klassen von Reihen festgelegt werden müssen, von denen die eine nur in diese Ordnungen, die schließlich auf konstante Differenzen zurückgeführt werden, unterteilt wird; diese Klasse werden wir in diesem Kapitel hauptsächlich betrachten.

§39 Zwei Sachen pflegen aber, um die Natur von Reihen zu erkennen, verlangt zu werden, der allgemeine Term und die Summe oder der summatorische Term. Der allgemeine Term ist ein unbestimmter Ausdruck, der jeden einzelnen Term einer Reihe umfasst und von solcher Art ist deshalb eine Funktion der variablen Größe x, die nach Setzen von $x = 1$ den ersten Term der Reihe darbietet, den zweiten aber nach Setzen von $x = 2$, den dritten nach Setzen von $x = 3$, den vierten nach Setzen von $x = 4$ und so weiter. Nachdem also der allgemeine Term erkannt worden ist, wird der wievielte Term der Reihe auch immer gefunden werden, auch wenn das Gesetz, nach welchem die einzelnen Terme zusammenhängen, nicht beachtet wird. So wird eines Beispiels wegen durch Setzen von $x = 1000$ sofort der tausendste Term erkannt werden. So ist der allgemeine Term von dieser Reihe

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 \text{ etc}$$

$2xx - x$; denn nach Setzen von $x = 1$ gibt diese Formel den ersten Term 1; für $x = 2$ gesetzt entspringt der zweite Term 6; wenn $x = 3$ gesetzt wird, entspringt der dritten 15 etc; daher tritt es klar zutage, dass der hunderste Term dieser Reihe für $x = 100$ gesetzt $= 2 \cdot 1000 - 100 = 19900$ sein wird.

§40 Die Indizes oder die Exponenten werden in jeder beliebigen Reihe die Zahlen genannt, die anzeigen, der wievielte Term ein bestimmter in der Reihe ist, so wird der Index des ersten Terms 1, des zweiten 2, des dritten 3 und so weiter sein. Daher pflegen die Indizes den einzelnen Termen jeder Reihe auf diese Weise hinzugeschrieben zu werden:

$$\text{Indizes}$$
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ etc}$$
$$\text{Terme}$$
$$A, B, C, D, E, F, G \text{ etc},$$

woher es sofort klar zutage tritt, dass G der siebte Term der vorgelegten Reihe ist, weil sein Index 7 ist. Daher wird der allgemeine Term nichts anderes sein als der Term der Reihe, dessen Index oder Exponent die unbestimmte Zahl x ist. Wie also in jeder beliebigen Ordnung von Reihen, deren entweder erste oder zweite oder andere folgende Differenzen konstant sind, der allgemeine Term gefunden werden muss, werden wir zuerst lehren; dann werden wir aber zu Untersuchung der Summe fortschreiten.

§41 Wir wollen also von der ersten Ordnung aus beginnen, die die arithmetischen Progressionen enthalten, deren erste Differenzen konstant sind; und es sei a der erste Term der Reihe und b der erste Term der Reihe der Differenzen, welchem alle folgenden gleich sind; daher wird die Reihe so beschaffen sein;

$$\begin{array}{rlllllll}
\text{Indizes} & & & & & & & \\
& 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \text{etc} \\
\text{Terme} & & & & & & & \\
& a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & a+4b, & a+5b, & \text{etc} \\
\text{Differenzen} & & & & & & & \\
& b, & b, & b, & b, & b, & b, & \text{etc}
\end{array}$$

Daraus tritt es sofort klar zutage, dass der allgemeine Term, dessen Index $= x$ ist, $a + (x-1)b$ sein wird und daher wird der allgemeine Term $= bx + a - b$ sein, der aus den ersten Termen sowohl der Reihe selbst als auch der Reihe der Differenzen zusammengesetzt ist. Wenn daher aber der zweite Term der Reihe $a + b$ a^I genannt wird, wird wegen $b = a^I - a$ der allgemeine Term dieser sein

$$= (a^I - a)x + 2a - a^I = a^I(x-1) - a(x-2),$$

woher aus dem ersten und zweiten bekannten Term der arithmetischen Progression ihr allgemeiner Term gebildet werden wird.

§42 Es seien in der Reihe der zweiten Ordnung die ersten Terme der Reihe selbst $= a$, die der ersten Differenzen $= b$, die der zweiten Differenzen $= c$ und die Reihe selbst mit ihren Differenzen wird so beschaffen sein

Indizes								
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	etc
Terme								
	a,	$a+b$,	$a+2b$,	$a+3b$,	$a+4b$,	$a+5b$,	$a+6b$,	
Erste Differenzen								
	b,	$b+c$,	$b+2c$,	$b+3c$,	$b+4c$,	$b+5c$,	etc	
Zweite Differenzen								
	c,	c,	c,	c,	c,	etc		

Aus der Betrachtung von dieser ist es klar, dass der Term, dessen Index $= x$ ist, sein wird

$$= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c,$$

welches also der allgemeine Term der vorgelegten Reihe ist. Es werde aber der zweite Term der Reihe selbst $= a^I$ gesetzt, der dritte werde $= a^{II}$ gesetzt; weil gilt

$$b = a^I - a \quad \text{und} \quad c = a^{II} - 2a^I + a,$$

wie aus der Natur der Differenzen (§10) eingesehen wird, wird der allgemeine Term sein

$$a + (x-1)(a^I - a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a^{II} - 2a^I + a),$$

die auf diese Form zurückgeführt wird

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^I(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

oder auch auf diese

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^I}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

oder schließlich auf diese

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^I}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

und daher wird aus drei Termen die Reihe selbst definiert

§43 Es sei die Reihe a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, etc von dritter Ordnung, ihre ersten Differenzen seien b, b^I, b^{II}, b^{III}, etc und die zweiten Differenzen c, c^I, c^{II}, c^{III}, etc und die dritten d, d, d, etc, die natürlich konstant sind

Indizes

1, 2, 3, 4, 5, 6, etc

Terme

a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, etc

Erste Differenzen

b, b^I, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, etc

Zweite Differenzen

c, c^I, c^{II}, c^{II}, c^{III}, etc

Dritte Differenzen

d, d, d, etc

Weil ist

$a^I = a + b$, $a^{II} = a + 2b + c$, $a^{III} = a + 3b + 3c + d$, $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$, etc

wird der allgemeine Term oder der, dessen Index x ist, sein

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d$$

und so wird der allgemeine Term aus den Differenzen gebildet werden. Weil aber weiter ist

$$b = a^I - a,\ c = a^{II} - 2a^I + a,\ d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^I - a,$$

wenn diese Werte eingesetzt werden, wird der allgemeine Term sein

$$a^{III}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 3a^{II}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+3a^I\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3} - a\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

der auch auf diese Weise ausgedrückt werden wird, dass ist

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^I}{x-2} - \frac{a}{x-1}\right)$$

§44 Es sie nun eine Reihe irgendeiner Ordnung vorgelegt:

Indizes

1, 2, 3, 4, 5, 6, etc

Terme

$a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^V$, etc

Erste Differenzen

$b,\ b^I,\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV}$, etc

Zweite Differenzen

$c,\ c^I,\ c^{II},\ c^{III}$, etc

Dritte Differenzen

$d,\ d^I,\ d^{II}$, etc

Vierte Differenzen

$e,\ e^I$, etc

Fünfte Differenzen

f, etc

Aus dem ersten Term der Reihe selbst und aus den ersten Termen der Differenzen b, c, d, e, f, etc wird der allgemeine Term so ausgedrückt werden, dass ist

$$a+\frac{(x-1)}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}e+\text{ etc},$$

bis schließlich zu konstanten Differenzen gelangt wird. Daher ist es klar, wenn nie konstante Differenzen hervorgehen, dass der allgemeine Term durch einen unendlichen Ausdruck dargeboten wird.

§45 Weil die Differenzen aus den Termen der Reihe selbst gebildet werden, wenn deren Werte eingesetzt werden, wird der allgemeine Term in einer Form solcher Art ausgedrückt hervorgehen, von welcher Art wir sie für die Reihen der ersten, zweiten und dritten Ordnung dargeboten haben. Natürlich wird für die Reihen der vierten Ordnung der allgemeine Term dieser sein

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{a^{IV}}{x-5}-\frac{4a^{III}}{x-4}+\frac{6a^{II}}{x-3}-\frac{4a^{I}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right),$$

woher das Bildungsgesetz, nach welchem die allgemeinen Terme der folgenden Ordnungen zusammengesetzt sind, leicht erkannt wird. Aus diesen Dingen tritt es aber klar zutage, dass für jede Ordnung der allgemeine Term eine ganz rationale Funktion von x sein wird, in welcher die größte Dimension von x mit der Ordnung übereinstimmt, zu welcher die Reihe gezählt wird. So wird der allgemeine Term von Reihen erster Ordnung eine Funktion ersten Grades sein, der der Reihen zweiten Grades eine Funktion zweiten Grades und so weiter.

§46 Aber die Differenzen, wie wir oben gesehen haben, resultieren aus den Termen der Reihe selbst so, dass gilt

$$\begin{array}{lll}
b = a^{I} - a & c = a^{II} - 2a^{I} + a & d = a^{III} - 3a^{II} + a^{I} - a \\
b^{I} = a^{II} - a^{I} & c^{I} = a^{III} - 2a^{II} + a^{I} & d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I} \\
b^{II} = a^{III} - a^{II} & c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II} & d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II} \\
\text{etc} & \text{etc} & \text{etc}
\end{array}$$

Daher, weil in der Reihen der ersten Ordnung alle Werte von $c = 0$ sind, wird sein

$$a^{II} = 2a^{I} - a,\ a^{III} = 2a^{II} - a^{I},\ a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}\ \text{, etc,}$$

woher klar zutage tritt, dass diese Reihen zugleich rekurrent sind und die Relationsskala 2, -1 ist.
Des Weiteren, weil in den Reihen zweiten Grades alle Werte von $d = 0$ sind, wird sein

$$a^{IV} = 3a^{II} - 3a^{I} + a,\ a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I},\ \text{etc,}$$

und daher werden auch diese rekurrent sein, während die Relationsskala 3, -3, 1 ist. Auf die gleiche Weise wird klar werden, dass alle Reihen dieser Klasse, von welcher Ordnung auch immer sie sind, sich zugleich auf die Klasse der rekurrenten Reihen beziehen und freilich so, dass die Relationsskala aus den Koeffizienten der um einen Grad höheren als die Ordnung, zu welcher die Reihe gerechnet wird, Potenz des Binoms besteht.

§47 Weil aber für die Reihen der ersten Ordnung auch alle Werte von d und e und aller folgenden Differenzen $= 0$ sind, wird auch in diesen gelten

$$\begin{aligned} a^{IV} &= 3a^{II} - 3a^{I} + a \\ a^{IV} &= 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a^{IV} &= 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a \\ a^{V} &= 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Sie werden sich daher also auch auf rekurrente Reihen beziehen und das auf unendlich viele Weisen, weil die Relationsskalen diese sein können

$$3, \; -3, \; +1; 4, \; -6, \; +4, \; -1; 5, \; -10, \; +10, \; -5, \; +1, \text{etc}$$

Und auf die gleiche Weise wird eingesehen, dass jede einzelne Reihe dieser Klasse, die wir behandeln, zugleich auf unendlich viele Arten eine rekurrente Reihe ist; denn die Relationsskala wird sein

$$\frac{n}{1}, \frac{-n(n-1)}{1 \cdot 2}, \; +\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \; -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{etc}$$

solange n eine ganze Zahl größer als die Zahl ist, mit welcher die Ordnung angezeigt wird. Es wird also diese Reihe auch aus der Entwicklung des Bruches entspringen, dessen Nenner $(1-y)^n$ ist, wie im oberen Buch über rekurrenten Reihen ausführlich gezeigt worden ist.

§48 So wie wir gesehen haben, dass die allgemeinen Terme von allen Reihen dieser Klasse, von welcher Ordnung auch immer sie sind, ganz rationale Funktionen von x sind, so wird umgekehrt klar werden, dass alle Reihen, deren allgemeine Terme Funktionen von x von dieser Art sind, sich auf diese Klasse beziehen und schließlich zu konstanten Größen geführt werden. Und zwar, wenn der allgemeine Term eine Funktion ersten Grades $ax + b$ war, während die daher entstehende Reihe von erster Ordnung oder arithmetisch sein wird, wird sie konstante erste Differenzen haben. Wenn aber der allgemeine Term eine in dieser Form $axx + bx + c$ enthaltene Funktion zweiten Grades war, dann wird die von ihm herstammende Reihe, während anstelle von x nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, etc eingesetzt werden, von zweiter Ordnung sein und konstante zweite Differenzen haben; auf die gleiche Weise wird der allgemeine Term dritten Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Reihe dritter Ordnung geben und so weiter.

§49 Aus dem allgemeinen Term werden aber nicht nur alle Terme der Reihe gefunden, sondern auch die Reihen der so ersten wie folgenden Differenzen können angeleitet werden. Weil nämlich, wenn der erste Term der Reihe vom zweiten subtrahiert wird, der erste Term der Differenzen hervorgeht, der zweite aber, wenn von der Reihe selbst zweite Term vom dritten der Reihe weggenommen wird, so wird von der Reihe der Differenzen der Term erhalten werden, dessen Index x ist, wenn von der Reihe selbst der Term, dessen Index x ist, vom folgenden subtrahiert wird, dessen Index $x + 1$ ist. Daher, wenn im allgemeinen Term der Reihe anstelle von x $x + 1$ gesetzt wird und von diesem Wert der allgemeine Wert subtrahiert wird, wird der allgemeine Term der Differenzen zurückbleiben, wenn also X der allgemeine Term der Reihe war, wird seine Differenz ΔX (die auf die im vorhergehenden Kapitel gezeigte Weise gefunden werden wird, wenn dort $\omega = 1$ gesetzt wird) der allgemeine Term der ersten Differenzen sein. Daher wird auf die gleiche Weise $\Delta\Delta X$ der allgemeine Term der Reihe der zweiten Differenzen sein, $\Delta^3 X$ der der dritten und so weiter.

§50 Wenn daher aber der allgemeine Term X eine ganz rationale Funktion war, in welcher die größte Potenz von x n ist, wird aus dem vorhergehenden Kapitel erschlossen, dass ihre Differenz ΔX eine um einen Grad geringere Funktion sein wird, nämlich eine vom Grad $n - 1$. Und daher wird weiter $\Delta\Delta X$ eine Funktion vom Grad $n - 2$ und $\Delta^3 X$ eine Funktion vom Grad $n - 3$ sein und so weiter. Daher, wenn X eine Funktion ersten Grades war, wie $ax + b$, dann wird ihre Differenz ΔX konstant $= a$ sein; weil dies der allgemeine Term der Reihe der ersten Differenzen ist, wird erkannt, dass die Reihe, deren allgemeiner Term X eine Funktion ersten Grades ist, arithmetische oder von erster Ordnung sein wird. Auf die gleiche Weise, wenn der allgemeine Term

X eine Funktion zweiten Grades war, wird wegen des konstanten $\Delta\Delta X$ die daher entspringende Reihe konstante zweite Differenzen haben und wird deshalb von zweiter Ordnung sein; und so wird immer, von welchem Grad die den allgemeinen Term festlegende Funktion X war, von demselben die aus ihm entstandene Reihe sein.

§51 Dieser Sache wegen gelangen die Reihen der Potenzen von natürlichen Zahlen zu konstanten Differenzen, wie aus dem folgenden Schema offenbar wird.

Erste Potenzen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc

Erste Differenzen

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

Zweite Potenzen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, etc

Erste Differenzen

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc

Zweite Differenzen

2, 2, 2, 2, 2, 2, etc

Dritte Potenzen

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, etc

Erste Differenzen

7, 19, 37, 61, 91, 127, etc

Zweite Differenzen

12, 18, 24, 30, 36, etc

Dritte Differenzen

6, 6, 6, 6, etc

Vierte Potenzen

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, etc

Erste Differenzen

15, 65, 175, 369, 671, 1105, etc

Zweite Differenzen

50, 110, 194, 302, 434, etc

Dritte Differenzen

60, 84, 108, 132, etc

Vierte Differenzen

24, 24, 24, etc

Was also im vorhergehenden Kapitel über das Finden von Differenzen einer jeden Ordnung gelehrt worden ist, wird hier dazu dienen, um die allgemeinen Terme jeglicher Differenzen, die aus den Reihen entsprießen, zu finden.

§52 Wenn der allgemeine Term einer gewissen Reihe bekannt war, werden mit seiner Hilfe nicht nur all ihre Terme bis ins Unendliche gefunden werden können, sondern die Reihe wird auch rückwärts fortgesetzt werden können und ihre Terme, deren Exponenten negative Zahlen sind, werden dargeboten werden können, indem anstelle von x negative Werte eingesetzt werden; so, wenn der allgemeine Term $\frac{xx+3x}{2}$ war, indem anstelle von x so negative wie positive Werte eingesetzt werden, wird die Reihe nach beiden Seiten fortgesetzt von dieser Art sein:

Indizes

etc , -5, -4, -3, -2, -1,	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc

Reihe

etc , $+5$, $+2$, 0, -1, -1,	0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, etc

Erste Differenzen

etc , -3, -2, -1, 0, 1,	2, 3, 4, 5, 6, 7, etc

Zweite Differenzen

etc ,1, 1, 1, 1, 1,	1, 1, 1, 1, 1, etc

Weil also aus den Differenzen der allgemeine Term gebildet wird, wird jede Reihe aus den Differenzen rückwärts fortgesetzt werden können, und zwar so, dass, wenn die Differenzen schließlich konstant werden, diese Terme endlich dargeboten werden, andernfalls aber durch einen unendlichen Ausdruck angegeben werden können. Ja es werden sogar aus dem allgemeinen Term die Terme, deren Indizes gebrochen sind, definiert werden, worin die Interpolation von Reihen enthalten ist.

§53 Nachdem diese Dinge über den allgemeinen Term von Reihen angemerkt worden sind, wollen wir dazu voranschreiten, die Summe oder den summatorischen Term von Reihen jeglicher Ordnung ausfindig zu machen. Nachdem aber irgendeine Reihe vorgelegt worden ist, ist der summatorische Term die Funktion von x, der gleich der Summe so vieler Terme der Reihe ist, wie die Zahl x Einheiten enthält. Der summatorische Term wird also so beschaffen sein, dass, wenn $x = 1$ gesetzt wird, der erste Term der Reihe hervorgeht, wenn aber $x = 2$ gesetzt wird, dass die Summe des ersten und des zweiten hervorgeht, für $x = 3$ gesetzt aber die Summe des ersten, zweiten und dritten und so weiter. Daher, wenn aus der vorgelegten Reihe eine neue Reihe gebildet wird, deren erster Term gleich dem erstem jener ist, der zweite gleich der Summe zweier, der dritte gleich der Summe von dreien und so weiter, wird diese neue Reihe die summarische jener genannt und der allgemeine Term dieser summarischen Reihe wird der summatorische Term der vorgelegten Reihe sein; daher wird das Finden des summatorischen Terms auf das Finden des allgemeinen Termes zuückgeführt.

§54 Es sei also diese Reihe vorgelegt

$$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, \text{etc}$$

und die summarische dieser Reihe sei

$$A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, \text{etc;}$$

es wird aus ihrer gerade dargelegten Natur sein

$$\begin{aligned}
A &= a \\
A^I &= a + a^I \\
A^{II} &= a + a^I + a^{II} \\
A^{III} &= a + a^I + a^{II} + a^{III} \\
A^{IV} &= a + a^I + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \\
A^V &= a + a^I + a^{II} + a^{III} + a^{IV} + a^V \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Daher werden die Differenzen der summarischen Reihe sein

$$A^I - A = a^I,\ A^{II} - A^I = a^{II},\ A^{III} - A^{II} = a^{III}, \text{ etc,}$$

woher die vorgelegte Reihe um den ersten Term vermindert die Reihe der ersten Differenzen der summarischen Reihe sein wird. Wenn daher also der summarischen Reihe der Term $= 0$ vorangestellt wird, dass man hat

$$0,\ A,\ A^I,\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^V, \text{ etc,}$$

wird von diesen die Reihe der ersten Differenzen die vorgelegte Reihe selbst sein

$$a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^V, \text{ etc,}$$

§55 Dieser Sache wegen werden die ersten Differenzen der vorgelegten Reihe die zweiten Differenzen der summarischen Reihe sein und die zweiten Differenzen jener werden die dritten von dieser sein, die dritten von jener aber die vierten von dieser und so weiter. Daher, wenn die vorgelegte Reihe schließlich konstante Differenzen hat, dann wird auch ihre summarische zu konstanten Differenzen geführt werden und wird daher eine Reihe derselben Natur sein, aber um eine Ordnung höher. Von Reihen dieser Art wird also der summatorische Term immer durch einen endlichen Ausdruck dargeboten werden können. Dann der allgemeine Term der Reihe

$$0,\ A,\ A^I,\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV}, \text{ etc}$$

oder der, der dem Index x zukommt, wird die Summe von $x - 1$ Termen dieser Reihe a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, etc darbieten, und wenn dann anstelle von x $x + 1$ geschrieben wird, wird die Summe von x Termen und der summatorische Term selbst entspringen.

§56 Es sei also von der vorgelegten Reihe

$$a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^V,\ a^{VI},\ \text{etc}$$

die Reihe der ersten Differenzen

$$b,\ b^I,\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^V,\ b^{VI},\ \text{etc}$$

die Reihe der zweiten Differenzen

$$c,\ c^I,\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^V,\ c^{VI},\ \text{etc}$$

die Reihe der dritten Differenzen

$$d,\ d^I,\ d^{II},\ d^{III},\ d^{IV},\ d^V,\ d^{VI},\ \text{etc}$$

und so weiter, bis schließlich zu konstanten Differenzen gelangt wird. Darauf werde die summarische Reihe gebildet, die sich mit der vorangestellten Null anstelle des ersten Termes mit ihren aufeinander folgenden Differenzen auf die folgende Weise verhalten wird:

Indizes

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\ \text{etc}$$

Summarische

$$0,\ A,\ A^I,\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^V,\ \text{etc}$$

Vorgelegte Reihe

$$a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^V,\ a^{VI},\ \text{etc}$$

Erste Differenzen

$$b,\ b^I,\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^V,\ b^{VI},\ \text{etc}$$

Zweite Differenzen

$$c,\ c^I,\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^V,\ c^{VI},\ \text{etc}$$

Dritte Differenzen

$$d,\ d^I,\ d^{II},\ d^{III},\ d^{IV},\ d^V,\ d^{VI},\ \text{etc}$$

Es wird der allgemeine Term der summarischen Reihe, oder der dem Index x entspricht, dieser sein

$$0 + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}c + \text{ etc},$$

der zugleich die Summe von $x-1$ Termen der vorgelegten Reihe darbietet, natürlich

$$a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ \text{etc.}$$

§57 Wenn daher also in dieser Summe anstelle von $x-1$ x geschrieben wird, wird der die Summe von x Termen umfassende summatorische Term der vorgelegten Reihe hervorgehen als

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d + \text{ etc}$$

Daher, wenn die Buchstaben b, c, d, e, etc die selbigen zugeschriebenen Werte beibehalten, wird sein:

Von der Reihe

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \text{etc}$$

der allgemeine Term

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}e + \text{ etc}$$

der summatorische Term

$$xa + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d + \text{ etc}$$

Nachdem also auf diese Weise, die wir gezeigt haben, der allgemeine Term jeder einen Reihe jeglicher Ordnung gefunden worden ist, wird aus ihm nicht schwer der summatorische Term aufgefunden werden, der natürlich aus denselben Differenzen zusammenfließt.

§58 Diese Art, den summatorischen Term durch Differenzen der Reihe zu finden, ist besonders für Reihen solcher Art, die schließlich zu konstanten Differenzen führen, geeignet; in anderen Fällen wird nämlich kein endlicher Ausdruck aufgefunden. Wenn wir daher aber die Dinge, die zuvor über die natürliche Beschaffenheit des summatorischen Termes dargelegt worden sind, aufmerksamer betrachten, offenbart sich eine andere Art, den summatorischen Term unmittelbar aus dem allgemeinen Term zu finden, die sich um Vieles weiter erstreckt und in unendlich vielen Fällen auf endliche Ausdrücke führt, in denen die erste Methode unendliche darbietet. Es sei nämlich irgendeine Reihe vorgelegt

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ \text{etc},$$

deren allgemeiner oder dem Index x entsprechender Term $= X$ sei; aber der summatorische Term sei $= S$, weil welcher die Summe so vieler Terme vom

Anfang aus darbietet, wie die Zahl x Einheiten enthält, wird die Summe von $x-1$ Termen $= S - X$ sein und daher wird X die Differenz des Ausdruckes $S - X$ sein, weil sie zurückgelassen wird, wenn diese vom folgenden S subtrahiert wird.

§59 Weil also $X = \Delta(S - X)$ die auf die Weise genommene Differenz ist, welche wir im vorhergehenden Kapitel gelehrt haben, nur mit dem Unterschied, dass jene konstante Größe ω hier für uns $= 1$ ist, woher, wenn wir zu Summen zurückgehen, $\Sigma X = S - X$ und daher der gesuchte summatorische Term dieser sein wird

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Es muss also die Summe der Funktionen X mit der zuvor angegebenen Methode gesucht werden und zu ihr muss der allgemeine Term X selbst addiert werden und das Aggregat wird der summatorische Term sein. Weil ja aber in den zu nehmenden Summen eine konstante Größe involviert wird, eine entweder zu addierende oder eine zu subtrahierende, wird sie an den gegenwärtigen Fall angepasst werden müssen. Es ist aber offenbar, wenn $X = 0$ gesucht wird, in welchem Fall die Anzahl der zu summierenden Terme Null ist, dass dann die Summe auch Null sein wird; daher wird jene Konstante C so bestimmt werden müssen, dass für $x = 0$ gesetzt auch $S = 0$ wird. Nachdem also in jener Gleichung $S = \Sigma X + X + C$ so $S = 0$ wie $x = 0$ gesetzt worden sind, wird der Wert von C gefunden werden.

§60 Weil ja also hier die ganze Aufgabe auf die oben gezeigte Summation von Funktionen zurückgeführt wird, indem $\omega = 1$ gesetzt wird, wollen wir daraus die angegebenen Summationen entnehmen und zwar wird für die Potenzen von x [§27] sein

$$\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \Sigma 1 = x \\
\Sigma x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\Sigma x^2 &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \\
\Sigma x^3 &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \\
\Sigma x^4 &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma x^5 &= \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 \\
\Sigma x^6 &= \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x,
\end{aligned}$$

zu welchen die in §29 angegebene allgemeine Summation der Potenz x^n hinzugerechnet werde, solange dort überall anstelle von ω die Einheit geschrieben wird. Mit Hilfe all dieser Formeln werden also die summatorischen Terme von allen Reihen, deren allgemeine Terme ganz rationale Funktionen von x sind, bequem gefunden werden können.

§61 Es bezeichne $S.X$ den summatorischen Term der Reihe, deren allgemeiner Term $= X$ ist, und es wird, wie wir gesehen haben, sein

$$S.X = \Sigma X + X + C,$$

solange die Konstante C so angenommen wird, dass der summatorische Term $S.X$ für $X = 0$ gesetzt verschwindet. Daher wollen wir also die summatorischen Terme der Reihen der Potenzen, oder deren allgemeine Terme in dieser Form x^n erfasst werden, ausdrücken. Deshalb wird nach Setzen von

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots + x^n$$

sein

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2\cdot 3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-3}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{2\cdot 3\cdots 6\cdot 7}x^{n-5} - \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-6)}{2\cdot 3\cdots 8\cdot 9}x^{n-7} \\
&+\frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-8)}{2\cdot 3\cdots 10\cdot 11}x^{n-9} - \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-10)}{2\cdot 3\cdots 12\cdot 13}x^{n-11} \\
&+\frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-12)}{2\cdot 3\cdots 14\cdot 15}x^{n-13} - \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-14)}{2\cdot 3\cdots 16\cdot 17}x^{n-15} \\
&+\frac{43967}{42}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-16)}{2\cdot 3\cdots 18\cdot 19}x^{n-17} - \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-14)}{2\cdot 3\cdots 20\cdot 21}x^{n-19} \\
&+\frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-20)}{2\cdot 3\cdots 22\cdot 23}x^{n-21} - \frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-22)}{2\cdot 3\cdots 24\cdot 25}x^{n-23} \\
&+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-24)}{2\cdot 3\cdots 26\cdot 27}x^{n-25} - \frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-26)}{2\cdot 3\cdots 28\cdot 29}x^{n-27}
\end{aligned}$$

etc

§62 Daher werden sich also die Summen für die verschiedenen Werte von n so verhalten:

$$
\begin{aligned}
S.x^0 &= x\\
S.x^1 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\\
S.x^2 &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x\\
S.x^3 &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2\\
S.x^4 &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x\\
S.x^5 &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2\\
S.x^6 &= \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x\\
S.x^7 &= \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2\\
S.x^8 &= \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x\\
S.x^9 &= \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2\\
S.x^{10} &= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x\\
S.x^{11} &= \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^3\\
S.x^{12} &= \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x\\
S.x^{13} &= \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{60}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 + \frac{691}{420}x^2\\
S.x^{14} &= \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{6}x^5 - \frac{691}{90}x^3 + \frac{7}{6}x\\
S.x^{15} &= \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} - \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2\\
S.x^{16} &= \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} - \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x
\end{aligned}
$$

etc

welche Summen aus der allgemeinen leicht bis hin zur neunundzwanzigsten Potenz fortgesetzt werden können. Und es ließe sich noch viel weiter fortschreiten, wenn jene numerischen Koeffizienten entsprechend weiter gefunden worden wären.

§63 Im Übrigen wird in diesen Formeln ein gewisses Gesetz beobachtet, mit dessen Hilfe jede beliebige aus der vorhergehenden leicht gefunden werden kann, nachdem nur allein der letzte Term herausgenommen worden ist, wenn in ihm die erste Potenz von x enthalten ist; dann kommt nämlich in der folgenden Summe darüber hinaus ein Term hinzu. Nachdem dieser aber weggelassen worden ist, wenn galt

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \xi x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \text{ etc}$$

wird die folgende Summe sein

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4}$$
$$-\frac{n+1}{n-6}\xi x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \text{ etc,}$$

woher, wenn n eine gerade Funktion war, die folgende Summe als wahr hervorgeht; aber wenn n eine ungerade Zahl war, dann wird in der folgenden Summe zusätzlich der letzten Term vermisst werden, dessen Form $\pm\varphi$ sein wird. Dennoch wird dieser ohne andere Hilfsmittel so gefunden werden können. Weil nämlich, wenn $x = 1$ gesetzt wird, die Summe nur eines einzigen Termes (das heißt der erste Term, der $= 1$ ist) entspringen muss, werde in allen schon gefundenen Termen $x = 1$ festgelegt und die Summe selbst $= 1$ gesetzt; danach wird der Wert von φ gefunden werden und nach Finden von diesem wird sich weiter fortschreiten lassen. Und auf diese Weise hätten all diese Summen gefunden werden können. So, weil gilt

$$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2,$$

wird auch gelten

$$S.x^6 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3 + \varphi x$$

oder

$$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \varphi x.$$

Es werde nun $x = 1$ gesetzt; es wird werden

$$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi \quad \text{und daher} \quad \varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42},$$

wie wir aus der allgemeinen Form gefunden haben.

§64 Mit Hilfe dieser summatorischen Formeln werden nun leicht von allen Reihen, deren allgemeine Terme ganz rationale Funktionen von x sind, die summatorischen Terme gefunden werden können und dies um vieles bequemer als durch die vorhergehende Methode durch Differenzen.

BESPIEL 1

Den summatorischen Term dieser Reihe 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, etc zu finden, deren allgemeiner Term $\frac{3xx+x}{2}$ ist.

Weil der allgemeine Term aus zwei Gliedern besteht, werde für jedes der beiden der summatorische Term aus den oberen Formeln gesucht

$$S.\frac{3}{2}xx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

und

$$S.\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

und es wird sein

$$S.\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2,$$

welcher der gesuchte summatorsiche Term ist. So, wenn $x = 5$ gesetzt wird, wird $\frac{5}{2} \cdot 6^2 = 90$ die Summe von fünf Termen sein

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

BEISPIEL 2

Den summatorischen Term der Reihe 1, 27, 343, 729, 1331, etc zu finden, welche die Kuben der ungeraden Zahlen enthält

Der allgemeine Term dieser Reihe ist

$$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

woher der summatorische Term auf die folgende Weise erschlossen werden wird:

$$+8 \cdot S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

und

$$-2 \cdot S.x^2 = \qquad -4x^3 - 6x^2 - 2x$$

und

$$+6 \cdot S.x \ = \qquad\qquad +3x^2 + 3x$$

schließlich

$$-1 \cdot S.x^0 = \qquad\qquad\qquad -x$$

Es wird natürlich die gesuchte Summe sein

$$= 2x^4 - x^2 = xx(2x-1).$$

Wie, wenn $x = 6$ gesetzt wird, $36 \cdot 71 = 2556$ die Summe der ersten sechs Terme der vorgelegten Reihe sein wird

$$1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556.$$

§65 Wenn daher der allgemeine Term ein Produkt aus einfachen Faktoren war, dann wird der summatorsiche Term durch die Dinge gefunden werden, die oben in §32 und den folgenden angegeben worden sind. Weil nämlich für $\omega = 1$ gesetzt gilt

$$\Sigma(x+n) = \frac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n+1)(x+n)(x+n-1)$$

sowie

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

etc,

wenn wir zu diesen Summen die allgemeine Terme selbst addieren und zugleich eine Konstante hinzufügen, die für $x = 0$ gesetzt den summatorischen Term verschwinden lässt, werden wir die folgenden summatorischen Terme erhalten

$$S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

sowie

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$
$$= \frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

und so weiter.
Wenn also entweder $n = 0$ oder $n = 1$ war, verschwindet die konstante Größe in diesen Summen.

§66 Also wird der summatorische Term der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, etc, deren allgemeiner Term $= x$ ist, $= \frac{1}{2}x(x+1)$ und die summarische Reihe diese sein 1, 3, 6, 10, 15, etc, deren summatorischer Term weiter dieser sein wird

$$= \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

und die summarische Reihe diese 1, 4, 10, 20, 35, etc. Diese wird in der Tat erneut diesen summatorischen Term haben

$$= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

der der allgemeine Term der Reihe 1, 5, 15, 35, 70, etc sein wird, und der summatorische Term von dieser wird nachstehender sein

$$= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Diese Reihen sind aber in Bezug auf die übrigen sorgsam aufzuzeichnen, weil ja deren Gebrauch überall sehr weitreichend ist. Aus diesen werden nämlich die Koeffizienten eines zu Potenzen erhobenen Binoms entnommen, wie weit welche sich erstrecken, jedem, der sich mit diesen Sache auch nur ein wenig beschäftigt hat, übergenung bekannt ist.

§67 Aus diesen Dingen werden auch jene summatorischen Terme, welche wir zuvor aus den Differenzen herausgefunden haben, leicht gefunden. Weil wir nämlich den allgemeinen Term in der folgenden Form ausgedrückt gefunden haben

$$a + \frac{x-1}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d + \text{ etc},$$

wenn wir den summatorischen Term eines jeden Gliedes suchen und sie alle addieren, werden wir den diesem allgemeinem Term zukommenden summatorischen Term haben. So, weil gilt

$$S.1 = x$$

und

$$S.(x-1) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

sowie

$$S.(x-1)(x-2) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

und auch

$$S.(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\text{etc},$$

welche Form nicht von der abweicht, die wir zuvor [§47] aus den Differenzen erhalten haben.

§68 Des Weiteren kann dieses Finden von summatorischen Termen auch auf Brüche angewendet werden; weil wir nämlich oben (§34) gefunden haben, dass durch Setzen von $\omega = 1$ ist

$$\Sigma\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1\cdot\frac{1}{x+n},$$

wird sein

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1\cdot\frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Auf die gleiche Weise, wenn wir zu den oben gefundenen Termen die allgemeinen Terme selbst addieren, oder, was dasselbe ist, wenn wir in jenen Ausdrücken anstelle von x $x+1$ setzten, werden wir haben

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

und

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,,$$

welche Formen leicht nach Belieben weiter fortgesetzt werden.

§69 Weil gelten wird

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}\,,$$

wird auch gelten

$$S.\frac{1}{x+n} - S.\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}\,.$$

Auch wenn also keine der beiden dieser summatorischen Terme einzeln dargeboten werden kann, wird dennoch deren Differenz erkannt werden und daher in mehreren Fällen die Summen der Reihen hinreichend bequem angegeben; dies passiert, wenn der allgemeine Term ein Bruch war, dessen Nenner in einfache Faktoren aufgelöst werden kann. Dann werde nämlich der ganze Bruch in Partialbrüche aufgelöst; danach wird mit Hilfe dieses Lemmas bald klar zutage treten, ob der summatorische Term dargeboten werden kann oder nicht.

Beispiel 1

Den summatorischen Term dieser Reihe $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ zu finden, deren allgemeiner Term $=\frac{2}{xx+x}$ ist.

Dieser allgemeine Term wird durch eine Auflösung auf diese Form $\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}$ zurückgeführt. Daher wird der summatorische Term sein

$$2S.\frac{1}{x} - 2S.\frac{1}{x+1}\,,$$

welcher also durch das vorhergehende Lemma sein wird

$$= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}\,.$$

So, wenn $x=4$ ist, wird $\frac{8}{5} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ sein.

Beispiel 2

Es werde der summatorische Term dieser Reihe $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$, etc gesucht, deren allgemeinen Term $= \frac{1}{4xx+4x-3}$ ist.

Weil der Nenner des allgemeinen Termes die Faktoren $2x-1$ und $2x+3$ hat, wird er in diese Teile aufgelöst werden

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}} .$$

Aber es ist

$$S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} ,$$

also

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} ,$$

dessen achter Teil den gesuchten summatorischen Term geben wird, nämlich

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8x+4} - \frac{1}{8x+12} = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)} = \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)} .$$

§70 Weil ja die gebildeten Zahlen, welche die Koeffizienten eines zu Potenzen erhobenen Binoms liefern, vor allen übrigen angemerkt zu werden verdienen, wollen wir die Summen von Reihen darbieten, deren Zähler $= 1$, deren Nenner hingegen die gebildeten Zahlen seien; dies wird aus §68 leicht geschehen. Also wird von der Reihe, deren

allgemeiner Term ist	der summatorische Term sein
$\frac{1\cdot 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1\cdot 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1\cdot 2\cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
etc	etc

Daher wird das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten, von selbst klar. Aber in der Tat kann daher nicht der summatorische Term, der dem allgemeinen Term $\frac{1}{x}$ zukommt, erschlossen werden, der natürlich nicht durch eine bestimmte Formel dargeboten werden kann.

§71 Weil ja aber der summatorische Term die Summe so vieler Terme liefert, wie Einheiten im Index x enthalten sind, ist es offenbar, dass die ins Unendliche fortgesetzten Summen dieser Reihen erhalten werden, wenn der Index x unendlich festgelegt wird; in diesem Fall werden die letzten Terme der geraden gefundenen Ausdrücke wegen der ins Unendliche übergehenden Nenner verschwinden.
Daher werden sie diese unendliche Summen haben, die sein werden

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\text{ etc} &= \frac{2}{1}\\
1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\text{ etc} &= \frac{3}{2}\\
1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\text{ etc} &= \frac{4}{3}\\
1+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\text{ etc} &= \frac{5}{4}\\
1+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}+\frac{1}{84}+\frac{1}{210}+\text{ etc} &= \frac{6}{5}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Die Summen von allen ins Unendliche fortgesetzten Reihen, deren summatorische Terme man hat, werden dargeboten werden könen, nachdem $x=\infty$ gesetzt worden ist, solange in diesem Fall die Summen endlich werden; dies passiert freilich, wenn im summatorischen Term x so viele Dimensionen im Nenner hat, wie es im Zähler hat.